ELEKTROTECHNICKÝ TAHÁK – 2

STEJNOSMĚRNÝ PROUD

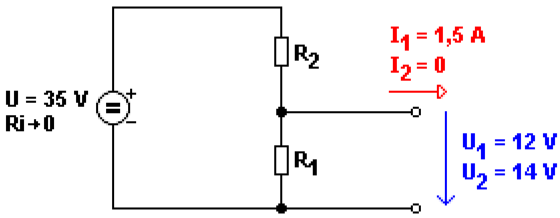
PŘÍKLAD NÁVRHU ZATÍŽENÉHO ODPOROVÉHO DĚLIČE

Zadání:

Navrhněte dělič napětí s rezistory R_1 a R_2 pro napájení 12V spotřebičů s maximálním proudovým odběrem 1,5 A. Dělič je napájen ze zdroje napětí 35 V se zanedbatelným vnitřním odporem. Výstupní napětí nezatíženého děliče nesmí překročit 14 V.

Postup řešení:

1) Nakreslíme schéma obvodu a popíšeme základní prvky, jejich hodnoty, napětí a proudy v obvodu.



2) Popíšeme obvod pomocí 2. Kirchhoffova zákona pro zatížený stav, kdy je na výstupu děliče napětí 12 V a odebíraný proud dosahuje maximální povolené hodnoty 1,5 A.

Rezistorem R_2 protéká výstupní proud I_1 a svodový (příčný) proud I_{R1} rezistoru R_1, pro I_{R1} platí

$$I_{R1} = \frac{U_1}{R_1} \qquad (1)$$

úbytek napětí na rezistoru R_2 je tvořen průchodem výstupního proudu I_1

$$\Delta_1 = R_2 \cdot I_1 \qquad (2)$$

a svodovým proudem rezistoru R_1

$$\Delta_2 = R_2 \cdot I_{R_1} \qquad (3)$$

po dosazení z (1)

$$\Delta_2 = R_2 \cdot \frac{U_1}{R_1} \qquad (4)$$

úbytek napětí na rezistoru R_2

$$\Delta U_{R_2} = \Delta_1 + \Delta_2 \qquad (5)$$

po dosazení z (2) a (4)

$$\Delta U_{R_2} = R_2 \cdot I_1 + R_2 \cdot \frac{U_1}{R_1} \qquad (6)$$

napětí ve smyčce podle 2. Kirchhoffova zákona

$$U = U_1 + \Delta U_{R2} \qquad (7)$$

po dosazení z (6)

$$U = U_1 + R_2 \cdot I_1 + R_2 \cdot \frac{U_1}{R_1} \qquad (8)$$

3) Totéž uděláme pro stav bez zatížení, kdy je odebíraný proud roven nule a napětí na výstupu děliče dosahuje maximální přípustné hodnoty 14 V.

$$U = U_2 + R_2 \cdot \frac{U_2}{R_1} \qquad (9)$$

4) Rovnice (8) a (9) tvoří soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, kterou lze řešit obecně známými matematickými metodami (součtová, dosazovací, determinanty).

První příklad řešení využívá výpočet pomocí determinantů, který je obvykle rychlejší než např. dosazovací metoda a odpovídá výpočtům na úrovni VŠ.

Jednotlivé rovnice soustavy upravíme

$$U = U_1 + R_2 \cdot I_1 + R_2 \cdot \frac{U_1}{R_1} \qquad /:U_1$$

$$U = U_2 + R_2 \cdot \frac{U_2}{R_1} \qquad /:U_2$$

---

po úpravě

$$\frac{U}{U_1} = 1 + R_2 \cdot \frac{I_1}{U_1} + \frac{R_2}{R_1} \qquad (10)$$

$$\frac{U}{U_2} = 1 + \frac{R_2}{R_1} \qquad (11)$$

---

rovnici (11) odečteme od rovnice (10)

$$\frac{U}{U_1} - \frac{U}{U_2} = R_2 \cdot \frac{I_1}{U_1} \qquad (12)$$

a upravíme

$$R_2 \cdot \frac{I_1}{U_1} = U \cdot \left(\frac{1}{U_1} - \frac{1}{U_2} \right) \qquad (13)$$

rovnici (17) upravíme

$$U = U_2 + R_2 \cdot \frac{U_2}{R_1} \qquad / \times R_1$$

na tvar

$$R_1 \cdot U = R_1 \cdot U_2 + R_2 \cdot U_2$$

a dále

$$-R_1 \cdot (U - U_2) + R_2 \cdot U_2 = 0 \qquad (14)$$

---

z upravených rovnic (13) a (14) vytvoříme novou soustavu

$$R_2 \cdot \frac{I_1}{U_1} = U \cdot \left(\frac{1}{U_1} - \frac{1}{U_2} \right) \qquad (13)$$

$$-R_1 \cdot (U - U_2) + R_2 \cdot U_2 = 0 \qquad (14)$$

---

připravíme pro řešení $\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{I_1}{U_1} \\ -(U-U_2) & U_2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} U\cdot\left(\dfrac{1}{U_1}-\dfrac{1}{U_2}\right) \\ 0 \end{vmatrix}$

determinant soustavy
$$D_\mathrm{S} = \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{I_1}{U_1} \\ -(U-U_2) & U_2 \end{vmatrix} \tag{15}$$

determinant k R_1
$$D_{\mathrm{R}_1} = \begin{vmatrix} U\cdot\left(\dfrac{1}{U_1}-\dfrac{1}{U_2}\right) & \dfrac{I_1}{U_1} \\ 0 & U_2 \end{vmatrix} \tag{16}$$

determinant k R_2
$$D_{\mathrm{R}_2} = \begin{vmatrix} 0 & U\cdot\left(\dfrac{1}{U_1}-\dfrac{1}{U_2}\right) \\ -(U-U_2) & 0 \end{vmatrix} \tag{17}$$

potom
$$R_1 = \frac{D_{\mathrm{R}_1}}{D_\mathrm{S}} = \frac{\begin{vmatrix} U\cdot\left(\dfrac{1}{U_1}-\dfrac{1}{U_2}\right) & \dfrac{I_1}{U_1} \\ 0 & U_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{I_1}{U_1} \\ -(U-U_2) & U_2 \end{vmatrix}} \tag{18}$$

$$R_2 = \frac{D_{\mathrm{R}_2}}{D_\mathrm{S}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & U\cdot\left(\dfrac{1}{U_1}-\dfrac{1}{U_2}\right) \\ -(U-U_2) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{I_1}{U_1} \\ -(U-U_2) & U_2 \end{vmatrix}} \tag{19}$$

numerické řešení
$$R_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0{,}41\overline{6} & 0{,}125 \\ 0 & 14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0{,}125 \\ -21 & 14 \end{vmatrix}} = 2{,}22\ \Omega$$

$$R_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0{,}41\overline{6} \\ -21 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0{,}125 \\ -21 & 14 \end{vmatrix}} = 3{,}33\ \Omega$$

Poznámka:

Při úpravách rovnic můžeme použít i jiný postup, např. rovnici (14)

$$-R_1 \cdot (U - U_2) + R_2 \cdot U_2 = 0$$

můžeme upravit na tvar $\quad R_1 \cdot (U_2 - U) + R_2 \cdot U_2 = 0$

aniž by výsledné řešení doznalo jakýchkoliv změn. Lze však použít i tvar

$$R_1 \cdot (U - U_2) - R_2 \cdot U_2 = 0$$

při tomto řešení vyjdou některé determinanty záporné, protože po formální stránce došlo k vynásobení jednoho řádku determinantu (-1). Stejné důsledky má sestavení soustavy rovnic v obráceném pořadí, např.

$$R_1 \cdot (U_2 - U) + R_2 \cdot U_2 = 0$$

$$R_2 \cdot \frac{I_1}{U_1} = U \cdot \left(\frac{1}{U_1} - \frac{1}{U_2} \right)$$

při němž dochází k záměně řádků determinantu a po jejich vyčíslení dostáváme

$$D_{\mathrm{S}} = -2{,}625$$

$$D_{\mathrm{R_1}} = -5{,}8333324$$

$$D_{\mathrm{R_2}} = -8{,}7499986$$

stejné výsledky dostaneme, použijeme-li v původním uspořádání rovnici (14).

Konečné numerické hodnoty jsou ale ve všech případech stejné.

Pro druhý příklad řešení použijeme postupy středoškolské matematiky. Vyjdeme z rovnic (8) a (9).

$$U = U_1 + R_2 \cdot I_1 + R_2 \cdot \frac{U_1}{R_1} \tag{8}$$

$$U = U_2 + R_2 \cdot \frac{U_2}{R_1} \tag{9}$$

úpravami například z rovnice (9) vyjádříme R_2

$$U = U_2 + R_2 \cdot \frac{U_2}{R_1} \qquad /-U_2$$

$$U - U_2 = R_2 \cdot \frac{U_2}{R_1} \qquad /:U_2$$

$$\frac{U - U_2}{U_2} = R_2 \cdot \frac{1}{R_1} \qquad /\times R_1$$

$$R_2 = R_1 \cdot \left(\frac{U - U_2}{U_2} \right) \tag{20}$$

z rovnice (20) dosadíme do (8) a postupně upravíme

$$U = U_1 + R_1 \cdot \left(\frac{U - U_2}{U_2} \right) \cdot I_1 + R_1 \cdot \left(\frac{U - U_2}{U_2} \right) \cdot \frac{U_1}{R_1}$$

$$U = U_1 + R_1 \cdot \left(\frac{U - U_2}{U_2} \right) \cdot I_1 + \left(\frac{U - U_2}{U_2} \right) \cdot U_1$$

$$U - U_1 - \left(\frac{U - U_2}{U_2} \right) \cdot U_1 = R_1 \cdot \left(\frac{U - U_2}{U_2} \right) \cdot I_1$$

$$R_1 = \frac{U - U_1 - \left(\frac{U - U_2}{U_2} \right) \cdot U_1}{\left(\frac{U - U_2}{U_2} \right) \cdot I_1} \qquad (21)$$

dosadíme numericky a vypočítáme

$$R_1 = \frac{35 - 12 - \left(\frac{35 - 14}{14} \right) \cdot 12}{\left(\frac{35 - 14}{14} \right) \cdot 1{,}5} = 2{,}22\ \Omega$$

dalšími úpravami z rovnice (9) vyjádříme R_1

$$U = U_2 + R_2 \cdot \frac{U_2}{R_1} \qquad /\text{-}U_2$$

$$U - U_2 = R_2 \cdot \frac{U_2}{R_1} \qquad /{:}R_2$$

$$\frac{U - U_2}{R_2} = \frac{U_2}{R_1} \qquad /^{-1}$$

$$\frac{R_2}{U - U_2} = \frac{R_1}{U_2} \qquad /\times U_2$$

$$R_1 = \left(\frac{R_2}{U - U_2} \right) \cdot U_2 \qquad (22)$$

z rovnice (20) dosadíme do (8) a postupně upravíme

$$U = U_1 + R_2 \cdot I_1 + R_2 \cdot \frac{U_1}{\left(\frac{R_2}{U - U_2}\right) \cdot U_2}$$

$$U - U_1 - R_2 \cdot I_1 = R_2 \cdot \frac{U_1}{\left(\frac{R_2}{U - U_2}\right) \cdot U_2}$$

$$U - U_1 - R_2 \cdot I_1 = \frac{R_2 \cdot U_1}{\frac{R_2 \cdot U_2}{U - U_2}}$$

$$U - U_1 - R_2 \cdot I_1 = \frac{R_2 \cdot U_1 \cdot (U - U_2)}{R_2 \cdot U_2}$$

$$U - U_1 - R_2 \cdot I_1 = \frac{U_1 \cdot (U - U_2)}{U_2}$$

$$U - U_1 - \frac{U_1 \cdot (U - U_2)}{U_2} = R_2 \cdot I_1$$

$$R_2 = \frac{U - U_1 - \frac{U_1 \cdot (U - U_2)}{U_2}}{I_1}$$

dosadíme numericky a vypočítáme

$$R_2 = \frac{35 - 12 - \frac{12 \cdot (35 - 14)}{14}}{1{,}5} = 3{,}33\ \Omega$$

Numerické výsledky jsou identické s předcházejícími výpočty.

Existuje řada dalších způsobů řešení, které vedou ke stejným výsledkům a jsou proto správné.

Na uvedených příkladech je vidět, že řešení i zdánlivě jednoduchých obvodů vede k relativně rozsáhlým výpočtům.